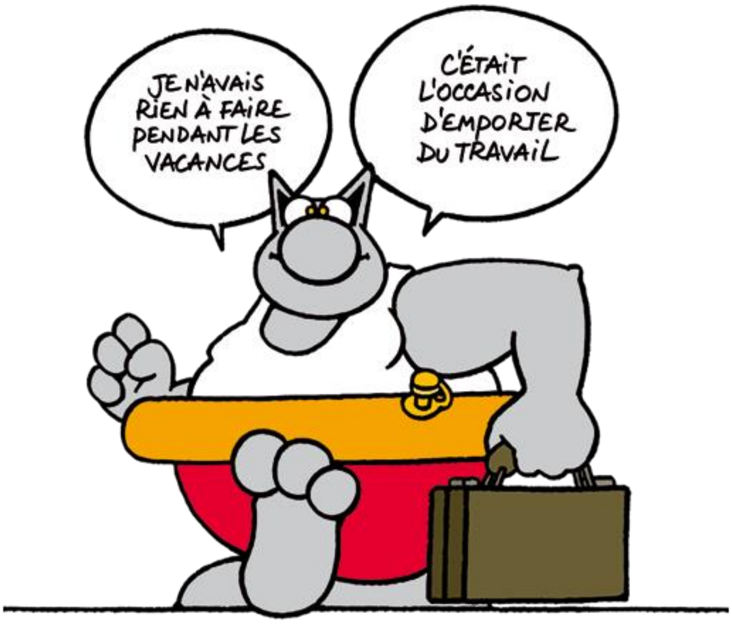
MATHEMATIQUES
Entrants en Terminale S - Rentrée 2018

Devoir de VACANCES



Ce devoir est à traiter vers la fin du mois d'août et sera rendu au premier cours de mathématiques en Terminale S.

Il permettra à votre professeur de voir où vous en êtes avec les notions. Il ne sera pas forcément noté.

EXERCICE 1

Une entreprise décide de fabriquer et de commercialiser un produit. Sa capacité maximale de production est de 20 tonnes. Le coût, en milliers d'euros, d'une production de x tonnes est donné par la relation :

$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 300x$$

1) Etudier les variations de C sur $[0\,;20]$.
2) En économie, on appelle **coût moyen**, notée C_M, le coût de fabrication d'une tonne de produit lorsque x tonnes sont produites. Donc :
$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$$
   a. Déterminer et étudier le sens de variation de la fonction C_M sur l'intervalle $]0; 20]$.
   b. En déduire le coût moyen minimal.
3) Après une étude de marché, l'entreprise décide de vendre son produit 84 000€ la tonne. Le bénéfice réalisé par l'entreprise est donc défini par la fonction B telle que
$$B(x) = 84x - C(x)$$
   a. Quelle doit-être la production x de l'entreprise pour qu'elle réalise un bénéfice maximal ?
   b. Est-ce la même valeur qui minimise le coût moyen ?

EXERCICE 2

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x + 1$
   a. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
   b. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.
   c. Vérifier que pour tout réel x, on a :
$$-x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 18x - \frac{81}{2} = (-x+3)\left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{27}{2}\right)$$
   d. Etudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à sa tangente T. Vérifier à l'aide de la calculatrice.

2) Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{x^2}{1-x}$$

a. Déterminer l'ensemble de définition de g.
b. Dresser le tableau de variations de g.

EXERCICE 3 : ANALYSER UNE DEMARCHE.

On considère deux fonctions f et g définies sur un intervalle I.
Pour démontrer que pour tout réel $x \in$ I, $f(x) \geq g(x)$, on peut étudier les variations de la fonction h définie sur I par $h(x) = f(x) - g(x)$ et en déduire son signe.
On considère l'exemple suivant.

> Montrons que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $x \geq -\frac{1}{x} + 2$.
>
> On pose $h(x) = x + \frac{1}{x} - 2$.
>
> On a alors pour $x > 0$: $h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$.
>
> Le signe de $h'(x)$ est celui de $x^2 - 1$, car $x^2 > 0$.
>
> $x^2 - 1 = 0$ admet comme unique solution 1 sur $]0;+\infty[$.
>
> Comme $h(1) = 0$, on obtient le tableau de variations ci-contre.
>
> Ainsi pour tout $x > 0$, $h(x) \geq 0$ (car 0 est le minimum de h).
>
> Donc pour tout $x > 0$, $x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$, et donc $x \geq -\frac{1}{x} + 2$.

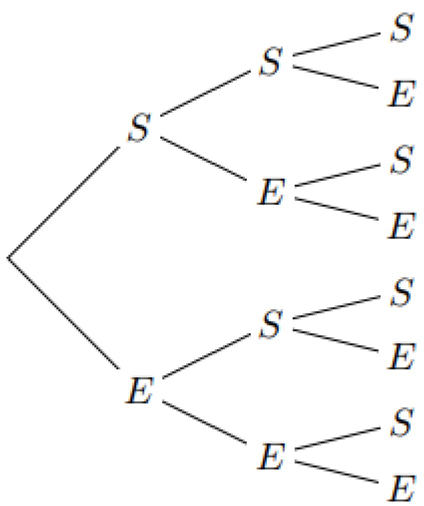
x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

En s'inspirant de l'exemple donné ci-dessus, montrer que pour tout réel x, on a :

$$x^4 - 3x + 1 > 2x^3 - 3x - 1$$

EXERCICE 4

On considère une épreuve admettant deux issues : une nommée « succès » et notée S de probabilité 0,4 ; l'autre nommée « échec » et notée E.
On décide de répéter trois fois cette même épreuve.
On obtient l'arbre de probabilité incomplet ci-contre.
On suppose ces répétitions indépendantes entre elles.



1) Compléter l'arbre de probabilité.
2) a. Combien de chemins comportent 3 succès ?
   b. Donner la probabilité d'obtenir trois succès à l'issue de cette expérience aléatoire.
3) a. Combien de chemins comportent 0 succès ?
   b. Donner la probabilité de n'obtenir aucun succès à l'issue de cette expérience aléatoire.
4) a. Combien de chemins comportent 2 succès ?
   b. Donner la probabilité d'obtenir exactement deux succès à l'issue de cette expérience aléatoire.

EXERCICE 5

Chaque mois, un fabricant de tondeuses produit 125 tondeuses et fait réaliser un test de conformité, dans les mêmes conditions, sur chacune de ses machines. Le test est positif pour une tondeuse dans 92% des cas.

1) On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de tondeuses conformes parmi les 125 produites.
   a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale de paramètres $n = 125$ et $p = 0{,}92$.
   b. Calculer $P(X = 115)$.
   On donnera la valeur numérique exacte, puis une valeur approchée à 10^{-3} près.
   c. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 120 tondeuses conformes parmi les 125 produites.
   On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.
   d. Calculer $E(X)$ et interpréter ce résultat.

2) Le fabriquant vend les tondeuses qu'il fabrique. Le coût de fabrication d'une tondeuse est de 160 € par machine. Si la tondeuse est conforme, elle est vendue 250 €.
Sinon, la tondeuse est bradée à un sous-traitant au prix de 100 €.
On note Y la variable aléatoire qui indique le bénéfice mensuel en euros.
Exprimer Y en fonction de X et en déduire $E(Y)$.

<u>EXERCICE 6</u>

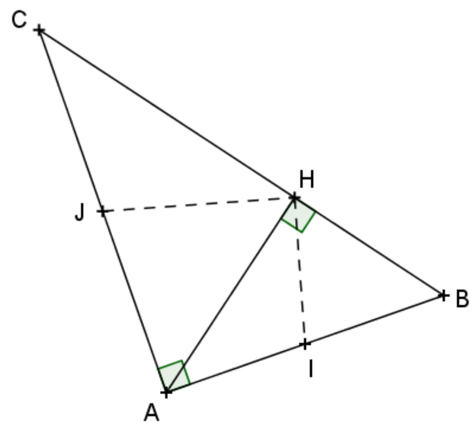
Alice et Paul comparent les étrennes qu'ils reçoivent chaque année.
En 2015, Alice a reçu 120 € et Paul 110 €.
Chaque année, les étrennes d'Alice augmentent de 2,5 % et celles de Paul augmentent de 5 €.
Pour tout entier naturel n, on note respectivement a_n et p_n les étrennes reçues par Alice et Paul l'année (2015+n), en euros. Ainsi, $a_0 = 120$ et $p_0 = 110$.

1) Préciser la nature de chacune des suites (a_n) et (p_n), en expliquant.
2) Exprimer a_n et p_n en fonction de n.
3) a. En quelle année les étrennes de Paul dépasseront elles 170 € ?
   b. Même question pour Alice.
4) On souhaite déterminer au bout de combien d'années les étrennes de Paul dépasseront celle d'Alice.
   a. Dans l'algorithme incomplet ci-contre, les variables *a* et *p* contiennent les étrennes respectives d'Alice et Paul pour l'année (2015+*n*). Le compléter de façon à ce que la dernière valeur de la variable *n* soit la réponse au problème.
   b. Résoudre le problème.
5) Quelles sommes auront perçu, en tout, Alice et Paul entre 2015 et 2025 (inclus) ? Arrondir au centime si besoin.

```
a ← 120
p ← 110
n ← 0
Tant que …… ≥ …… faire
        a ← a ×  ……
        b ← ……
        n ← ……
Fin Tant que
```

<u>EXERCICE 7</u>

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en A, les points I et J sont les milieux des côtés $[AB]$ et $[AC]$ et H est le projeté orthogonal de A sur $[BC]$.
On veut démontrer que les droites (HJ) et (HI) sont orthogonales.
On va employer plusieurs méthodes, utilisant des outils différents, pour prouver ce résultat.



1) <u>Avec le produit scalaire.</u>
   a. Montrer que : $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC} = -AH^2$.
   b. En déduire que $\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{HJ} = 0$, puis conclure.
2) <u>Avec des configurations du plan.</u>
   a. Montrer que le cercle circonscrit au triangle AIJ passe par le milieu de $[BC]$.
   b. En déduire que H appartient à ce cercle. Conclure.
3) <u>Avec le théorème de Pythagore.</u>
   a. On note $x = AB, y = AC$ et $z = BC$. Exprimer HI, HJ et IJ en fonction de x, y et z.
   b. Conclure en utilisant le triangle HIJ.

<u>EXERCICE 8</u>

A, B et C sont trois points tels que $AB = 5, AC = 8$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 20$.

1) Quelle est la valeur de l'angle $\widehat{BAC}$?
2) Faire une figure que l'on complétera par la suite.
3) En écrivant $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ puis en élevant au carré, calculer BC.
4) Déterminer l'ensemble $\mathfrak{D}$ des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
5) Soit I le milieu de $[BC]$. Montrer que, pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = MI^2 - \frac{BC^2}{4}$.
6) En déduire l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 20$.

EXERCICE 9

Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points $A(-1;1)$ et $B\left(1;\frac{7}{3}\right)$.

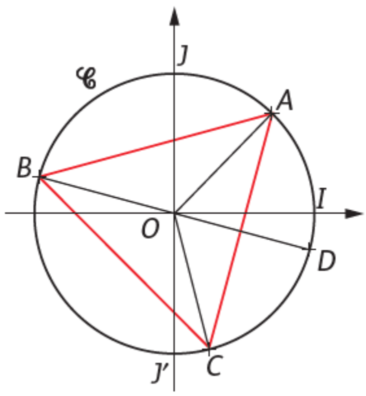
La droite Δ admet comme équation cartésienne $3x+2y-\frac{10}{3}=0$.

1) On considère la droite d passant par les points A et B.
   a. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   b. En déduire une équation cartésienne de la droite d.
2) a. Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ directeur de la droite Δ.
   b. Justifier que les droites d et Δ sont sécantes.
   c. Déterminer les coordonnées du point N, intersection des droites d et Δ.
3) a. Justifier que le point $M\left(2;-\frac{4}{3}\right)$ appartient à la droite Δ.
   b. Justifier que la droite Δ est la médiatrice du segment $[AB]$.

EXERCICE 10

Les questions 1), 2) et 3) sont indépendantes.

1) Sur la figure ci-contre où le repère $(O\,;I\,;J)$ est orthonormé direct, ABC est un triangle équilatéral tel que $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}\right)=\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$.
   $[BD]$ est un diamètre du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.
   a. Donner des réels associés aux points A, B, C et D.
   b. Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :
   $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right)$ $\quad\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)$ $\quad\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}\right)$



2) Démontrer que pour tout réel x, $\cos(x)+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$.
3) On souhaite résoudre dans $[0;2\pi]$ l'équation (E) :
$$2\cos^2 x+7\cos x-4=0$$
   a. On pose $X=\cos x$.
   Ecrire l'équation (E) à l'aide de X, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ cette équation en X.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0;2\pi]$ l'équation (E).